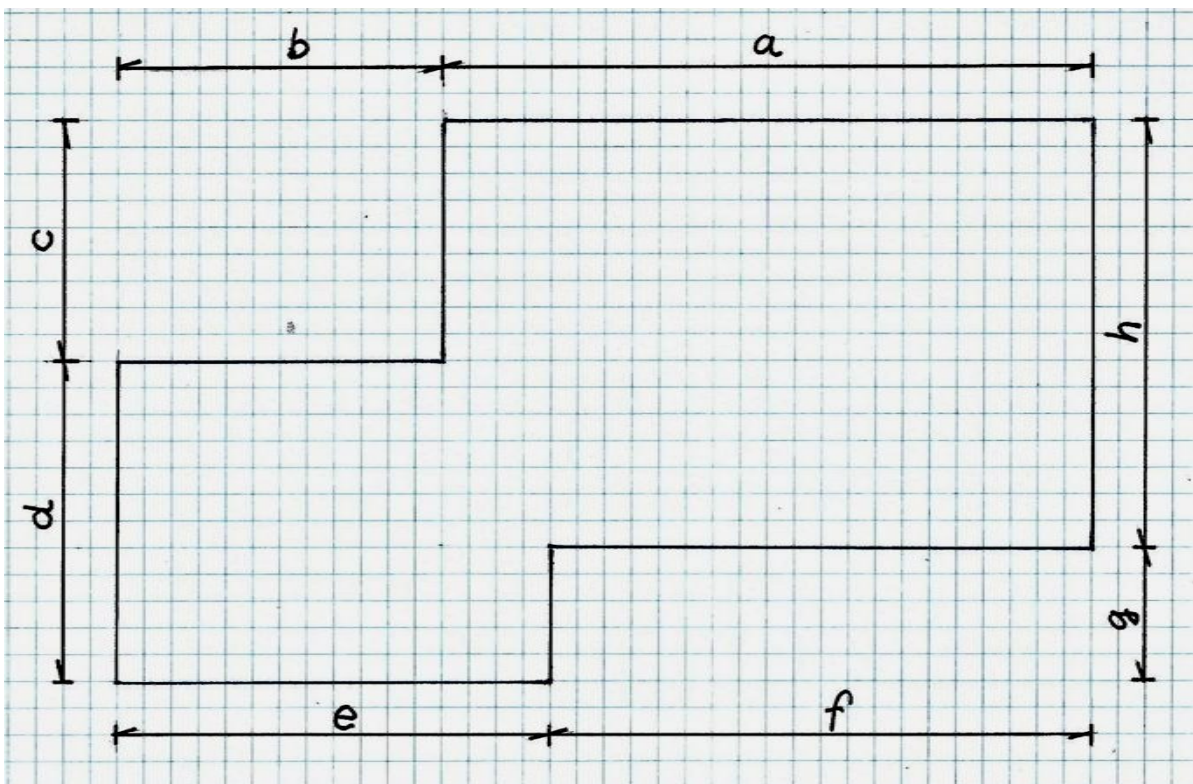


Egy összetettebb ács tetőgeometriai feladat

Már több írásunkban foglalkoztunk a hózuggal, annak meglétével, illetve annak elkerülésével. Most megint eszünkbe jutott, így kidolgoztunk rá egy feladatot. Persze, kicsit felcicomáztuk, hogy emlékeztessünk rá, miszerint a fedélidom - közepelés az ács szakmai munkájának, valamint vizsgafeladatának is csak egy része.

A feladat

Adott az 1. ábrán közölt alaprajzú kontyolt tető.



1. ábra

Minden ereszvonalt egyazon vízszintes síkban van, minden tetősík azonos α hajlású.

Határozzuk meg:

- ~ az ereszvonalt L_e teljes hosszát;
- ~ a tető A felszínét;
- ~ az élek és vágák L_g együttes hosszát;
- ~ a taréjok L_t együttes hosszát;
- ~ a taréjok ereszsík feletti m_i magasságát;
- ~ az élek és vágák β hajlását!

Útmutatás:

- ~ először oldjuk meg a feladatot betűkkel / paraméteresen, majd ezután a kapott képletek - be helyettesítsük be a számszerű adatokat;
- ~ a számítás sorrendjének nem kell követnie a feladat kiírását;
- ~ a végeredményeket csak a hózugmentes esetre számítsuk ki;
- ~ a teljesebb kép érdekében rajzoljuk meg a hózugos tető felülnézeti képét is!

Adatok:

$$\begin{aligned} a &= 24 \text{ m} ; b = 12 \text{ m} ; c = 9 \text{ m} ; d = 12 \text{ m} ; \\ e &= 16 \text{ m} ; f = 20 \text{ m} ; g = 5 \text{ m} ; h = 16 \text{ m} ; \\ \alpha &= 45^\circ. \end{aligned} \quad (A)$$

A megoldás

Az ereszvonal teljes hossza:

$$\underline{L_e = a + b + c + d + e + f + g + h.} \quad (1)$$

Most (1) és (A) - val:

$$\begin{aligned} L_e &= (24 + 12 + 9 + 12 + 16 + 20 + 5 + 16) \text{ m} = 114 \text{ m} , \text{ tehát:} \\ \underline{\underline{L_e &= 114 \text{ m} .}} \end{aligned} \quad (e1)$$

A tető felszíne:

$$\underline{A = \frac{T_{vet}}{\cos \alpha} .} \quad (2)$$

A tető alaprajzi vetületi területe, az 1. ábra jelöléseivel:

$$T_{vet} = a \cdot h + b \cdot d + (e - b) \cdot g ; \quad (3)$$

majd (3) és (A) - val:

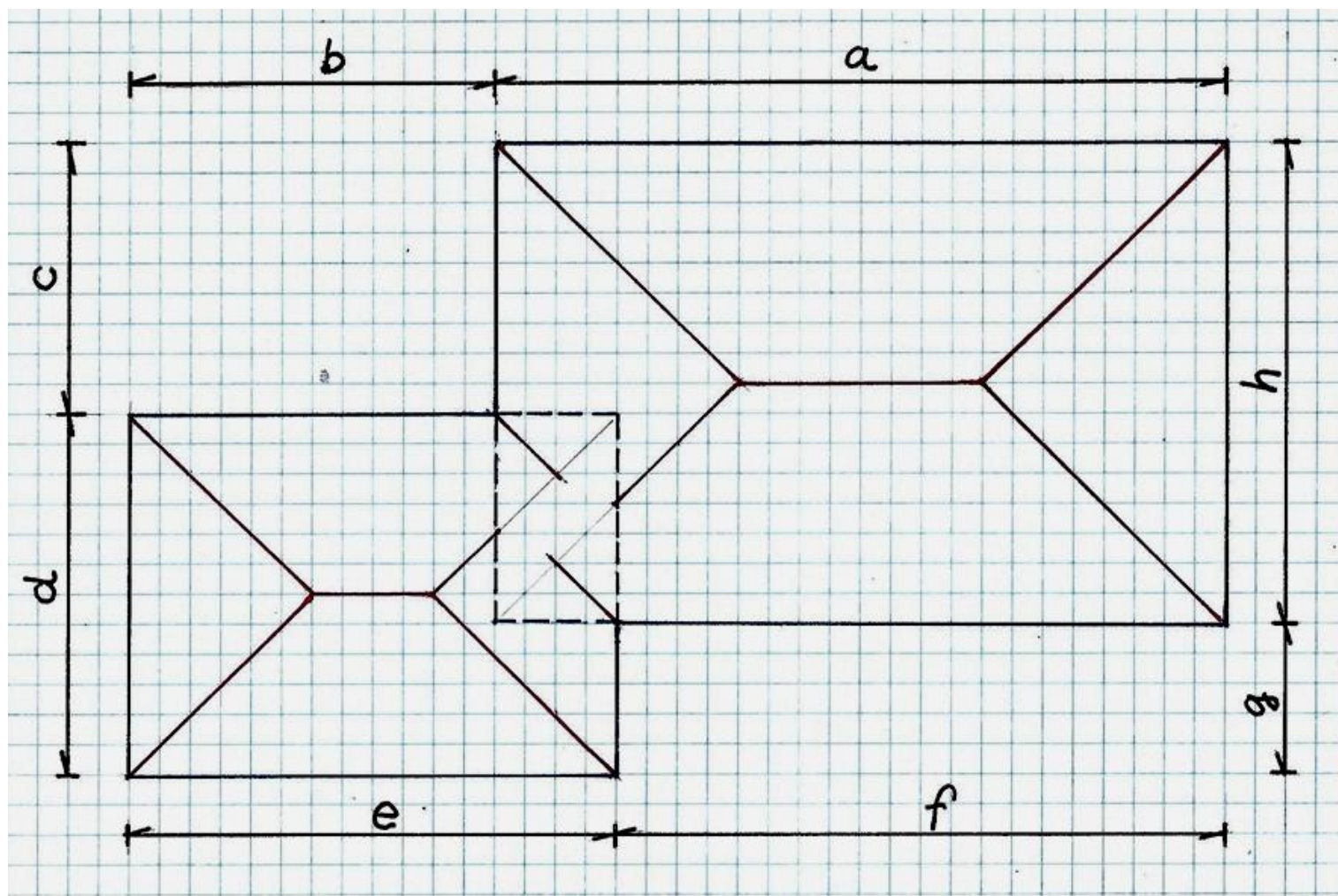
$$\begin{aligned} T_{vet} &= 24 \text{ m} \cdot 16 \text{ m} + 12 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} + (16 \text{ m} - 12 \text{ m}) \cdot 5 \text{ m} = 548 \text{ m}^2 , \text{ tehát:} \\ T_{vet} &= 548 \text{ m}^2 ; \end{aligned} \quad (e2)$$

ezután (2), (e2) és (A) - val:

$$\begin{aligned} A &= \frac{548 \text{ m}^2}{\cos 45^\circ} = 774,9890322 \text{ m}^2 \approx 775 \text{ m}^2 , \\ \text{tehát:} \\ \underline{\underline{A &\approx 775 \text{ m}^2 .}} \end{aligned} \quad (e3)$$

Látjuk, hogy az első két kérdés megválaszolásához nem volt szükség a fedélidom ki - közepelésére.

A fedélidom kiközepelt – hózugmentes – felülnézeti képének előállítását a 2. ábrán követhetjük.

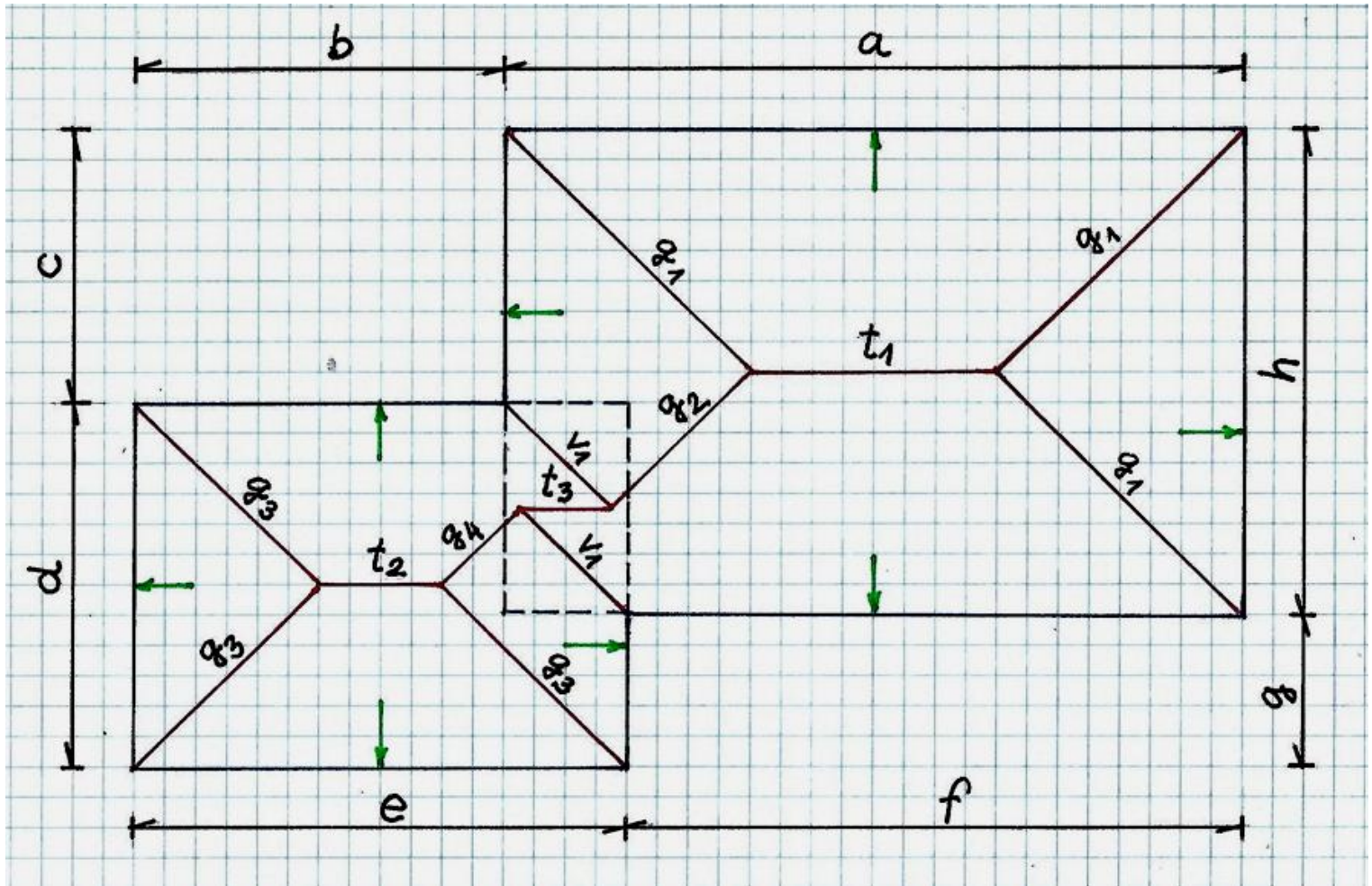


2 / 1. ábra

A 2 / 1. ábrán a szögfelezésekkel kapott részeredményeket mutatjuk.

Most eldöntjük, hogy a hózugmentes változatot állítjuk elő. Ehhez a két téglalap össze - metsződő sarkát kell alaposan megfigyelni. Az eredményt a 2 / 2. ábra mutatja.

Itt bejelöltük az esővíz lefolyási irányait, valamint megneveztük a g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) élgerinceket, a v_1 vápákat, a t_j ($j = 1, 2, 3$) taréjgerinceket is. Az azonos jelű elemek egyező hosszúak. Minthogy a vízszintes taréjok a felülnézeti képen valódi hosszukban látszanak – a méretaránytól eltekintve –, így azok összesített hossza rögtön megállapítha - tó. Itt egyszerűen a négyzeteket kell csak leszámolni, majd e számot a méretarányak



2 / 2. ábra

megfelelően átváltani. Részletezve:

$$t_1 = a - 2 \cdot \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = a - h, \quad (4)$$

most (4) és (A) - val:

$$t_1 = 24 \text{ m} - 16 \text{ m} = 8 \text{ m}; \quad (\text{e4})$$

majd:

$$t_2 = e - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = e - d, \quad (5)$$

ezután (5) és (A) - val:

$$t_2 = 16 \text{ m} - 12 \text{ m} = 4 \text{ m}; \quad (\text{e5})$$

most:

$$t_3 = 3 \text{ négyzethossz} \cdot \frac{1 \text{ m}}{\text{négyzet hossz}} = 3 \text{ m}; \quad (\text{e6})$$

ezután a taréjok összes hossza, (e4, 5, 6) - tal is:

$$L_t = t_1 + t_2 + t_3 = 8 \text{ m} + 4 \text{ m} + 3 \text{ m} = 15 \text{ m}, \text{ tehát:}$$

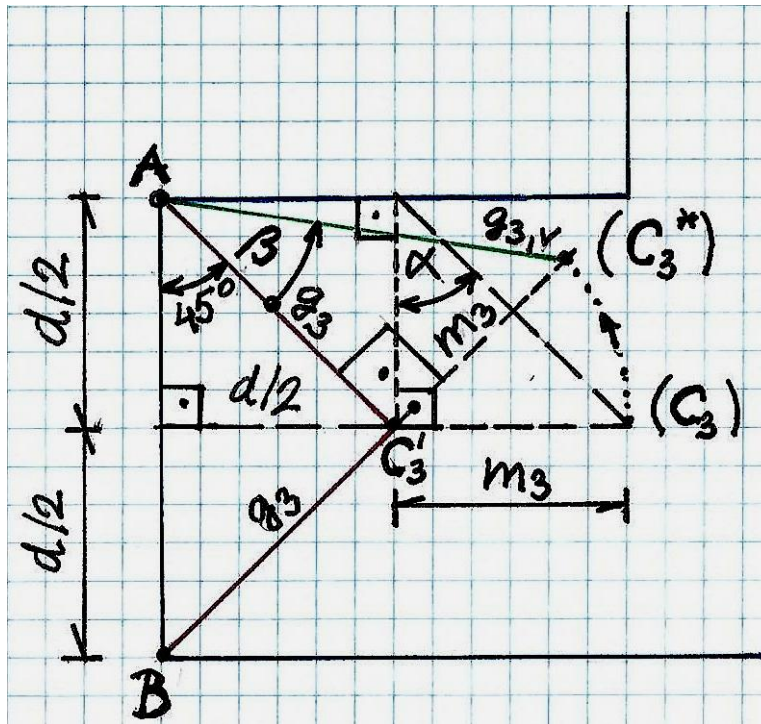
$$\underline{\underline{L_t = 15 \text{ m}}}. \quad (\text{e7})$$

Az él - és vápa - gerincek valódi hosszának megállapításához gondoljuk végig az alábbi - akat!

1.) Az alaprajzi vetületi hosszban egyező ferde elemek térbeli hossza is egyezik, mert minden tetősík egyező hajlású.

2.) Az elemek térbeli hossza arányos a vetületi hosszával.

Az arányossági tényező meghatározásához tekintsük a 3. ábrát!



3. ábra

Ez alapján az élgerincek és a vápák β valódi hajlására:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_3}{g_3} = \frac{\frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\frac{d}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}}, \text{ tehát:}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}} \rightarrow \underline{\underline{\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}} \right)}}. \quad (6)$$

Most (6) és (A) - val:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35,26438968^\circ \approx 35,3^\circ, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{\beta \approx 35,3^\circ < \alpha = 45^\circ.}} \quad (\text{e8})$$

Az élgerinc valódi hossza a 3. ábráról *Pitagorász* tételével és (6) - tal is:

$$g_{3,v} = \sqrt{g_3^2 + m_3^2} = \sqrt{g_3^2 \cdot \left(1 + \frac{m_3^2}{g_3^2}\right)} = g_3 \cdot \sqrt{1 + \frac{m_3^2}{g_3^2}} = g_3 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} =$$

$$= g_3 \cdot \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2}}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{g_{3,v} = g_3 \cdot \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2}}.}} \quad (7)$$

Ezek szerint a valódi hossz és a vetületi hossz közti **k** arányossági tényező:

$$g_{3,v} = k \cdot g_3, \quad (8)$$

majd (7) és (8) összehasonlításából:

$$\underline{\underline{k = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2}}.}} \quad (9)$$

Feladatunkban számszerűen, (9) és (A) - val:

$$k = \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 45^\circ}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{k = \sqrt{\frac{3}{2}}.}} \quad (\text{e9})$$

Minthogy az élekre és vágókra:

$$L_g = g_{1,v} + g_{2,v} + \dots = k \cdot g_1 + k \cdot g_2 + \dots = k \cdot (g_1 + g_2 + \dots) = k \cdot L_{vet}, \text{ tehát:}$$

$$L_g = k \cdot L_{vet}, \quad (10)$$

ezért célszerű először kiszámolni a ferde gerincek vetületi hosszainak összegét, majd az eredményt szorozni **k** - val. Így lényegesen csökkenhet a számolási munka mennyisége.

Feladatunkban a 2 / 2. ábra szerint:

$$L_{vet} = 3 \cdot g_1 + g_2 + 3 \cdot g_3 + g_4 + 2 \cdot v_1. \quad (11)$$

Részletezve:

$$g_1 = \frac{h}{2} \cdot \sqrt{2}; \quad (12 / 1)$$

$$g_2 = \frac{4,5}{8} \cdot g_1 = \frac{9}{16} \cdot g_1 = \frac{9}{16} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{2} , \text{ tehát:}$$

$$g_2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{2} ; \quad (12 / 2)$$

$$g_3 = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} ; \quad (12 / 3)$$

$$g_4 = \frac{2,5}{6} \cdot g_3 = \frac{5}{12} \cdot g_3 = \frac{5}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} , \text{ tehát:}$$

$$g_4 = \frac{5}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} . \quad (12 / 4)$$

$$v_1 = \frac{3,5}{6} \cdot g_3 = \frac{7}{12} \cdot g_3 = \frac{7}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} , \text{ tehát:}$$

$$v_1 = \frac{7}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} . \quad (12 / 5)$$

Most (11) és (12) szerint:

$$\begin{aligned} L_{vet} &= 3 \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{9}{16} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{5}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(3 \cdot h + \frac{9}{16} \cdot h + 3 \cdot d + \frac{5}{12} \cdot d + \frac{14}{12} \cdot d \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{57}{16} \cdot h + \frac{55}{12} \cdot d \right) , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$L_{vet} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{57}{16} \cdot h + \frac{55}{12} \cdot d \right) . \quad (13)$$

Számszerűen (13) és (A) - val:

$$L_{vet} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{57}{16} \cdot 16 \text{ m} + \frac{55}{12} \cdot 12 \text{ m} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (57 \text{ m} + 55 \text{ m}) = \frac{112}{\sqrt{2}} \text{ m} , \text{ tehát:}$$

$$L_{vet} = \frac{112}{\sqrt{2}} \text{ m} . \quad (\text{e10})$$

Most (e9), (10), (e10) szerint:

$$L_g = k \cdot L_{vet} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{112}{\sqrt{2}} \text{ m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 112 \text{ m} = 96,99484522 \text{ m} \approx 97,00 \text{ m} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{L_g \approx 97,00 \text{ m} .}} \quad (\text{e11})$$

A taréjok ereszsík feletti magasságai:

~ a t_1 taréj magassága:

$$m_1 = \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{16 \text{ m}}{2} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 8 \text{ m} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{m_1 = 8 \text{ m} ;}} \quad (\text{e12 / 1})$$

~ a t_2 taréj magassága:

$$m_2 = \frac{d}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{12 \text{ m}}{2} \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 6 \text{ m} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{m_2 = 6 \text{ m} ;}} \quad (\text{e12 / 2})$$

~ a t_3 taréj magassága:

$$m_3 = \frac{d}{12} \cdot 3,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{12 \text{ m}}{12} \cdot 3,5 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 3,5 \text{ m} , \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{m_3 = 3,50 \text{ m} .}} \quad (\text{e12 / 3})$$

Az (e12) eredmények a 2 / 2. ábráról szinte közvetlenül leolvashatók.

Eredményeinket összefoglaljuk, egy szöveges válasz formájában.

Tehát:

~ az eresztvonal teljes hossza: $L_e = 114 \text{ m} ;$

~ a tető felszíne: $A \approx 775 \text{ m}^2 ;$

~ az élek és vápák együttes hossza: $L_g \approx 97,00 \text{ m} ;$

~ a taréjok L_t együttes hosszát: $L_t = 15 \text{ m} ;$

~ a taréjok ereszsík feletti magasságai: $m_1 = 8 \text{ m} , m_2 = 6 \text{ m} , m_3 = 3,50 \text{ m} ;$

~ az élek és vápák hajlása: $\beta \approx 35,3^\circ .$

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.

A hózugos „megoldás” megrajzolását már rábizzuk az érdeklődő Olvasóra.

Ez könnyen megy a 2 / 1. ábra alapján.

Megjegyzések:

M1. A kezdőknek mindenképpen javasolt a négyzetrácsos papír alkalmazása a rajzolás - hoz. Ábráinkat ezért mi is így készítettük.

M2. A paraméteres megoldási mód egyik előnye, hogy egyfajta képletgyűjteményt is szolgáltat. Nem elhanyagolható az a jelenség sem, hogy gyakran feleslegessé válik több részletszámítás elvégzése, a lehetséges egyszerűsítések miatt. Az is érdekes lehet, hogy a jól felépített és megörökített számítás később is segíthet a hasonló feladatok megoldásának megtervezésében és kivitelezésében.

M3. Írásunk címében összetettebb feladatról van szó. Még összetettebbé válna, ha a tető

szerkezetével is foglalkoznánk benne. Ekkor azonban már sokkal több mindenre kellene ügyelni, ami akár az alaprajz, a tetőhajlások, stb. megváltoztatását is maga után vonhatná. Ez már közelebb állna egy tervezési feladathoz, ami nem kifejezetten ács szakmai feladat; ez már inkább a magasépítő technikusok, még inkább a mérnökök feladata lehet.

M4. Az (e6) kapcsán követett eljárásunk első pillantásra nem tűnik túl tudományosnak. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy négyzetrácsos papír használata és kellően gondos rajzolás esetén a fél négyzethosszak szemmel láthatóan egyeznek, így itt a két fél éppen egy egészet tesz ki. A fél négyzetoldalnyi hosszak fellelése szabad szemmel is jól felismerhető, ha a rajzi adottságoknak megfelelő méretarányral dolgozunk.

Ha nem olyan könnyen felismerhető tört négyzethossz adódik, akkor az ácsipari gyakorlat számára is elég pontos lehet a lemért, még pontosabb a számított szakaszhossz, a méret - arálynak is megfelelően. A szakaszhosszak számítását itt csak kevés helyen alkalmaztuk.

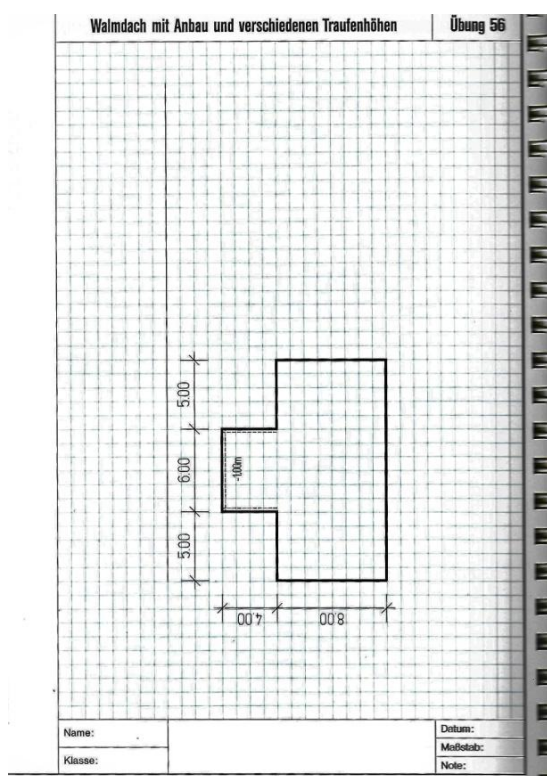
M5. A hózugos fedélidom képét azért érdemes megrajzolni és megfigyelni, hogy tudjuk, mit ajánlatos elkerülnünk. Saját tapasztalatunk erről az, hogy ez segíti a feladatmegoldást. (Továbbá ezért is járhat pont a megoldott vizsgafeladat értékelése során.)

M6. A fentiek – egy lehetséges feladat és annak lehetséges megoldása.

Ugyanezen feladat kapcsán más részeredmények is kérhetők. Erősen ajánlott a méret - aránnyal kapcsolatosan is kérdéseket feltenni! E téma ugyanis meglepően gyakran nem megy jól, ezért minél többet kell gyakorolni. Érdemes lehet azt is megnézni a vizsgára való felkészítés során, hogyan boldogul a tanuló az 1. ábra szerinti feladat - kiírási mód esetén; amikor ugyanis a rajzon betűk szerepelnek, ehhez kell a tanulónak méretarányos rajzot készíteni, a betűkhöz rendelt számszerű adatok, valamint a szakmai szokásoknak, illetve a feladat - megoldás célszerűségi igényeinek megfelelően.

M7. Ismét a négyzetrácsos papírról – 4. ábra. Már sokszor szóba hoztuk, most meg is mutatjuk, hogy német ács / tetőfedő szakmai segédanyagokban gyakran négyzetrácsos papírt alkalmaznak a feladatok kiírásához is. Ez teljesen egyezik saját tapasztalataink alapján kialakult véleményünkkel: kevés hátránya, viszont sok előnye van. Emlékezhetünk egy olyan megtörtént esetre is, amikor a sima / nem négyzetrácsos papír alkalmazása miatt a vizsgafeladat hivatalos megoldása is hibásra sikeredett. Ez már elég indok kellene, hogy legyen. [Annak idején azt javasoltam tanulóimnak, hogy az ács szakmunkásvizsga írásbeli feladatainak kézhezvétele után vegyék elő saját üres négyzetrácsos papírjaikat, és dolgozzanak azon. Nem baj, ha a megoldást nem másolják át a hivatalos sima papírra, hiszen a „piszkozat” is értékelhető vizsga - dokumentum. Sőt: ha valaki (na ki?) ezt nehezen dol -

gozná fel, majd a javító szaktanár udvariasan elmagyarázza az esetleg nem is szakmabeli értetlenkedőnek, hogy mi ezt tartjuk normálisnak és célszerűnek. Vicces, hogy néha mi - lyen képtelen követelményeket támasztanak egy vizsga során. A nagy kedvenc: tilos szak - mai segédleteket használnia a vizsgázónak. De akkor azok minek vannak, tessék mondani? Hiszen azokat majdan szakmai munkája során is használni fogja. Megvan?]



4. ábra – forrása: [1]

M8. Észrevehető, hogy a feladat - kiírás szövegével sokat lehet segíteni a vizsgázó tanuló - nak. Ez nem egy titkos információ. Ebben a feladatban segítség lehet valakinek az, hogy az élek és vápák közös β hajlásszögéről beszélünk. Esetleg az is, hogy egyes elemek együttes, nem pedig egyedi hosszait kell megállapítani. Utóbbi a fakivonat - készítés során kerülhet (újra) elő.

M9. Itt is felhívjuk a figyelmet a (2) képlet használatára. Ez sokáig nem is szerepelt a szakmai tankönyvekben. Gyanítjuk, hogy sokan még mindig az egyes tetősíkidomok terü - letének külön - külön való kiszámításával, majd ezek összegzésével állítják elő az azonos hajlású síkidomokból álló tető felszínét. A különálló meghatározásnak ott van értelme, ahol az egyes tetősík - darabok eltérő fedést igényelnek. Ilyen előfordulhat pl. különböző színű / mintájú / anyagú tetőfedések alkalmazása esetén, ugyanazon a tetőn.

A szögfüggvényeket is tartalmazó képletek használatához azonban szükséges a szögfügg - vények megbízható ismerete is, amit éppen ezért nem kellene hanyagolni, szakmunkás - tanulók esetében sem.

M10. Arra is emlékeztetjük a téma iránt érdeklődő Olvasót, hogy a 45° - os szöggel gyakran baj van a tanuló fejében. A 3. ábra is tartalmaz ilyeneket:

~ egyfelől az ereszsarok derékszögének felezésével előáll az 3. ábrán külön bejelölt 45° - os szög,

~ másfelől az α tetőhajlások is 45° - osak e feladatban, az egyszerűség kedvéért.

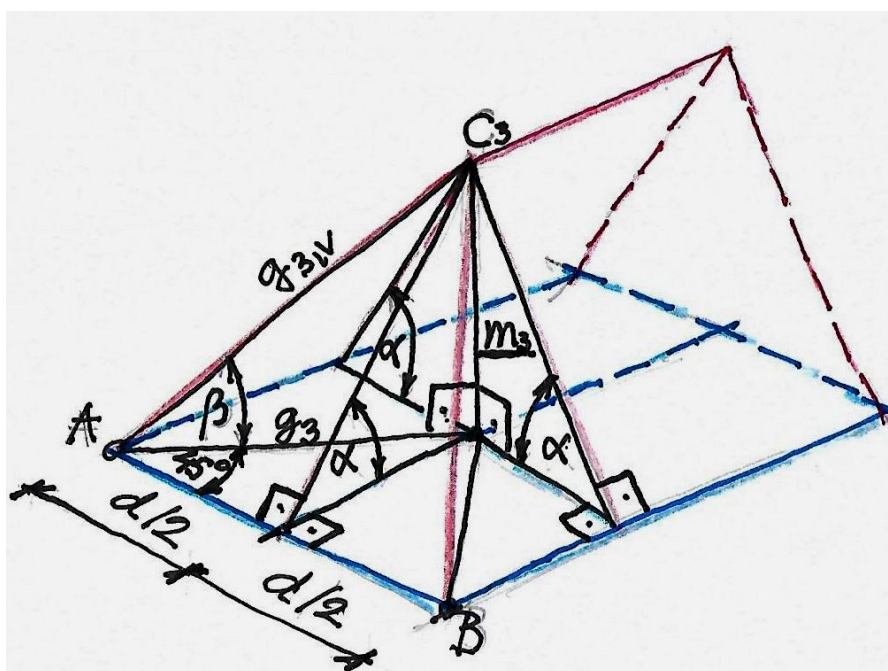
Nem véletlen, hogy a 3. ábrán csak egyszer tüntettük fel a 45° - os szöget.

M11. Meglehet, nem teszünk jót azzal a kezdőnek, hogy – a könnyebbségre hivatkozva – állandóan 45° - os hajlásszöget veszünk fel. Ebből kialakulhat egy hibás rutin is.

A könnyebbséget az is jelentheti, hogy $\tan 45^\circ = 1$, valamint az is, hogy a $45 - 45 - 90^\circ$ - os vonalzóval, illetve a négyzetrácsos papírral jelentősen könnyebbé és rövidebbé válik a rajzi munka. Fentiek miatt előbb - utóbb el kell kezdeni más tetőhajlásokkal is dolgozni, egyeztetve azt az alkalmazandó tetőfedéssel.

M12. A ferde gerincek hajlása képlettel is számítható, de szerkeszthető is. E feladatban mindkettőt megtettük, ahogyan az a 3. ábrán is látható. A szerkesztett / lemért és a számított eredmények jól egyeznek. Az (e8) eredménynél külön kiemeltük azt is, hogy $\beta < \alpha$. Volt már országos gond ennek figyelmen kívül hagyása miatt is.

M13. A 3. ábrán két különböző, függőleges helyzetű derékszögű háromszög képsíkba döntöttjét mutatjuk. A térbeli helyzet visszaállítását érdemes lehet akár kartonpapír - maketten is, illetve axonometrikus ábrán bemutatni, és amikor adódik, lerajzoltatni, vázlatrajzot készíttetni, szabadkézzel is – 5. ábra. Nem baj, ha nem túl szép, de jó.



5. ábra

Forrás:

[1] – ***Johannes Karduck ~ Hans - Peter Lambertz ~ Michael Schäfer:***
Aufgabensammlung Fachrechnen
Dachgeometrie
3. Auflage, Rudolf Müller, Köln, 1998.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2021. 01. 11.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>